Grado en Matemáticas – Ejercicios de Análisis Funcional

Relación 2 - Ejemplos de espacios normados (para hacer en casa)

1. En ℓ_∞ se define una norma por
$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|}{2^n}$$
Estudia si ℓ_∞ con dicha norma es un espacio de Banach.

2. Sea $\mathcal{L}$ el espacio de las funciones lipchicianas de $[0,1]$ en $\mathbb{K}$.

   a) Para $f \in \mathcal{L}$ se define
$$\nu(f) = \sup\left\{ \frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|} : s,t \in [0,1], s \neq t \right\}$$
   Prueba que ν es una seminorma en $\mathcal{L}$ y deduce que $\|f\| = |f(0)| + \nu(f)$ es una norma. ¿Qué relación tiene dicha norma con la norma uniforme?

   b) Prueba que $(\mathcal{L}, \|\ \|)$ es un espacio de Banach.

3. Prueba que la sucesión $\{e_n\}$ de los vectores unidad es una base de Schauder de c_0, y que para todo $x \in c_0$ la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} x(n)e_n$ converge incondicionalmente en c_0. ¿Cuándo es dicha serie absolutamente convergente?

4. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos y $1 \leqslant p < \infty$. Prueba que el conjunto:
$$P = \{x \in \ell_p : |x(n)| < a_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$
Es abierto en ℓ_p si, y sólo si, $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} > 0$.

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada en cada caso para todo $t \in [0,1]$ por:
$$a)\ f_n(t) = t^n - t^{n+1}, \quad b)\ f_n(t) = t^n - t^{2n}, \quad c)\ f_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$$
Estudia la convergencia de la sucesión $\{f_n\}$ en cada uno de los espacios:
$$\text{a) } (C[0,1], \|\,.\,\|_\infty); \quad \text{b) } (C^1[0,1], \|\,.\,\|^1) \quad \text{c) } (C[0,1], \|\,.\,\|_1)$$